

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC



PHẠM TRUNG LÂM

**TÍCH NGOÀI CỦA VÉC TƠ VÀ ỨNG DỤNG**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2017**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC



**PHẠM TRUNG LÂM**

**TÍCH NGOÀI CỦA VÉC TƠ VÀ ỨNG DỤNG**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp**

**Mã số: 60 46 01 13**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC  
PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI**

**THÁI NGUYÊN - 2017**

## Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của Phó Giáo sư - Tiến sĩ Trịnh Thanh Hải. Tác giả xin trân trọng bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn, động viên khích lệ và tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu luận văn.

Qua bản luận văn này, tác giả xin gửi lời cảm ơn tới Ban Giám hiệu trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán - Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy và tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu trong suốt thời gian qua.

Tác giả cũng xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và tất cả mọi người đã quan tâm, động viên và giúp đỡ để tác giả có thể hoàn thành luận văn của mình.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

*Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2017*

Tác giả luận văn

**Phạm Trung Lâm**

# Mục lục

Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt	iii
Danh mục các bảng	iv
Mở đầu	1
<b>1 Kiến thức chuẩn bị</b>	<b>3</b>
1.1. Định nghĩa . . . . .	3
1.2. Tính chất . . . . .	3
1.3. Biểu thức tọa độ của tích ngoài hai véc tơ . . . . .	4
1.4. Hướng và diện tích đại số của tam giác . . . . .	4
1.5. Hướng và diện tích đại số của đa giác lồi . . . . .	6
1.6. Mối liên hệ giữa độ dài đại số và diện tích đại số . . . . .	7
<b>2 Một số ứng dụng tích ngoài véc tơ</b>	<b>9</b>
2.1. Mở rộng định lí Gergaune . . . . .	9
2.2. Ứng dụng của tích ngoài véc tơ vào giải toán . . . . .	10
2.3. Vấn đề tỉ số kép của chùm đường thẳng . . . . .	13
2.4. Một số bài toán . . . . .	15
2.5. Một số bài tập đề nghị . . . . .	44
<b>Kết luận</b>	<b>45</b>
<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>46</b>

# Danh mục các ký hiệu, các chữ viết tắt

$(\vec{a}, \vec{b})$	Góc lượng giác giữa hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ .
$(a, b)$	Góc giữa hai đường thẳng $a, b$ .
$S[XYZ]$ hoặc $S_{[XYZ]}$	Diện tích đại số của $\triangle XYZ$ .
$S(XYZ)$ hoặc $S_{XYZ}$	Diện tích hình học của $\triangle XYZ$ .
$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ ( $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ )	Hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng (ngược hướng).

## Danh mục các hình vẽ

Hình 2.1:.....	10
Hình 2.2:.....	11
Hình 2.3:.....	15
Hình 2.4:.....	16
Hình 2.5:.....	17
Hình 2.6:.....	17
Hình 2.7:.....	19
Hình 2.8:.....	21
Hình 2.9:.....	23
Hình 2.10:.....	24
Hình 2.11:.....	25
Hình 2.12:.....	27
Hình 2.13:.....	28
Hình 2.14:.....	29
Hình 2.15:.....	30
Hình 2.16:.....	32
Hình 2.17:.....	33
Hình 2.18:.....	34
Hình 2.19:.....	35
Hình 2.20:.....	36
Hình 2.21:.....	38
Hình 2.22:.....	41

# Mở đầu

## 1. Lý do chọn đề tài

Trong các đề thi học sinh giỏi, ngoài các bài tập áp dụng tính chất của tích vô hướng, thì đã có rất nhiều bài có lời giải liên quan đến tích ngoài của hai véc tơ. Tuy nhiên trong chương trình, sách giáo khoa môn toán ở THPT không trình bày nội dung tích ngoài của hai véc tơ nên việc vận dụng tích ngoài của hai véc tơ vào giải toán là một vấn đề khó đối với nhiều học sinh. Với mong muốn đưa ra một cách hệ thống kiến thức về tích ngoài của hai véc tơ và việc vận dụng các kiến thức đó vào giải toán trung học phổ thông, tác giả đã lựa chọn đề tài "**Tích ngoài của hai véc tơ và ứng dụng**".

## 2. Mục đích nghiên cứu

Tìm hiểu và trình bày một cách hệ thống các kiến thức cơ bản về tích ngoài của hai véc tơ đồng thời trình bày ứng dụng tích ngoài hai véc tơ vào giải toán.

## 3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn có nhiệm vụ:

- a. Tìm hiểu về tích ngoài của hai véc tơ: Định nghĩa, tính chất, biểu thức tọa độ tích ngoài hai véc tơ.
- b. Sưu tầm và trình bày việc ứng dụng tích ngoài của hai véc tơ vào giải một số bài toán dành cho học sinh giỏi, đề thi chọn học sinh giỏi trong nước và quốc tế.
- c. Đưa ra lời giải chi tiết, đầy đủ cho bài toán mà trong các tài liệu tham khảo chỉ có lời giải tóm tắt hoặc gợi ý.

#### **4. Nội dung luận văn**

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, luận văn được trình bày ngắn gọn trong hai chương

Luận văn gồm hai chương như sau:

**Chương 1.** Kiến thức chuẩn bị

**Chương 2.** Một số ứng dụng tích ngoài véc tơ

Một cách cụ thể, luận văn sẽ trình bày các kết quả chính trong các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [4], [5].



## Chương 1

# Kiến thức chuẩn bị

Trong chương 1, luận văn chọn lọc và trình bày một số kiến thức liên quan đến tích ngoài của hai véc tơ dựa chủ yếu vào tài liệu tham khảo [2] và [4].

### 1.1. Định nghĩa

Tích ngoài của hai véc tơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  kí hiệu là  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  là một số, được xác định như sau:

- Nếu  $\begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$  thì  $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ .
- Nếu  $\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$  thì  $\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$ .

Từ định nghĩa trên ta có ngay hệ quả hiển nhiên:

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = 0.$$

### 1.2. Tính chất

Tích ngoài của hai véc tơ có ba tính chất cơ bản sau đây:

- i)  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$  (phản giao hoán);
- ii)  $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$  (phân phối);

$$\text{iii) } (k\vec{a}) \wedge (l\vec{b}) = (kl)(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

### 1.3. Biểu thức tọa độ của tích ngoài hai véc tơ

Để có thể chứng minh được các tính chất của tích ngoài, trước hết ta có định lí sau:

**Định lí 1.1** Trên mặt phẳng tọa độ cho hai véc tơ  $\vec{a}(x_1; y_1)$ ,  $\vec{b}(x_2; y_2)$ . Khi đó

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

### 1.4. Hướng và diện tích đại số của tam giác

#### a) Hướng của tam giác

Cho tam giác ABC, ta thấy các hướng quay từ A đến B đến C, từ B đến C đến A, từ C đến A đến B trùng nhau và gọi là hướng của tam giác ABC. Như thế các tam giác ABC, BCA, CAB có cùng hướng.

Nếu hướng của tam giác ABC trùng với hướng của mặt phẳng thì ta nói tam giác ABC có hướng dương.

Nếu tam giác ABC có hướng ngược với hướng của mặt phẳng thì ta nói tam giác ABC có hướng âm.

#### b) Tam giác suy biến

Theo định nghĩa thông thường, ba đỉnh của một tam giác phải là ba điểm không thẳng hàng. Tuy nhiên, khi xét các bài toán về diện tích, yêu cầu này đôi khi trở nên không cần thiết mà còn gây trở ngại cho việc làm toán. Vì vậy, ta đưa ra khái niệm *Tam giác suy biến*, tức là tam giác mà ba đỉnh thẳng hàng. Để cho thuận tiện, ta thay thuật ngữ *tam giác suy biến* bởi thuật ngữ *tam giác*.

#### c) Diện tích đại số của tam giác

*Diện tích đại số* của tam giác ABC là một số đại số (có thể dương, âm hoặc bằng không), kí hiệu  $S_{[ABC]}$  (hoặc  $S[ABC]$ ) và được xác định như